Solução das eqs. de movimento: modos normais de vibração

As eqs. de movimento formam um sistema de eqs. difs. lineares acopladas, com coeficientes constantes, que pode ser expresso na forma matricial

$$\hat{T}\ddot{\eta} + \hat{V}\eta = 0 \quad \text{, onde } \hat{T} = [T_{jk}], \ \hat{V} = [V_{jk}], \ \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}$$

i) P/ simplificar a solução convém considerar $\eta_k(t) = Re[z_k(t)]$, onde z_k é complexo. Claramente, se z satisfaz a eq. acima então o mesmo vale p/ η.

ii) Vamos buscar soluções da forma $z_k(t) = z_k(0)e^{i\omega t}$, onde ω independe de k (ie, $z(t) = z(0)e^{i\omega t}$). Nesse caso $\ddot{z} = \omega^2 z$. Para ser possível é necessário encontrar ω real e $z \neq 0$ tais que

$$(\hat{V} - \omega^2\hat{T})z = 0 \implies \det(\hat{V} - \omega^2\hat{T}) = 0$$

→ valores possíveis para ω^2 são encontrados resolvendo uma eq. polinomial de grau n em ω^2

(por que se pode garantir que as raízes serão positivas?)

obs: como T é uma matriz simétrica e positiva ($\dot\eta T \dot\eta \geq 0$, $=0 \iff \dot\eta = 0$) então ela é inversível. Encontrar esses z, ω é então o mesmo que encontrar os autovetores/autovalores de $T^{-1}V$ (sendo ω^2 o autovalor)

i.e, resolver $\quad (T^{-1}V - \omega^2 \mathbb{1}) z = 0 \quad$ (soluções ω_s^2, $\rho^{(s)}$)

A soluções ω_s são chamadas frequencias características, e os autovetores z são "vetores característicos".

Agora: como $\hat{T}^{-1}\hat{V}$ é uma matriz real com autovalores reais, seus autovetores também podem ser escolhidos de modo a serem reais (se $v = v_R + i v_I$ e A real $Av = \lambda v$, então $Av_R = \lambda v_R$, $Av_I = \lambda v_I$)

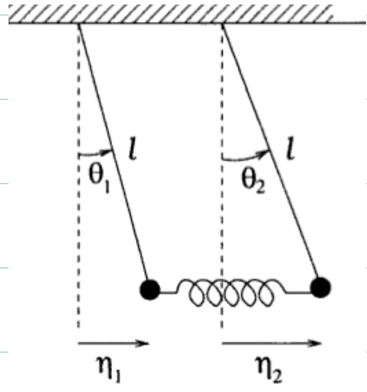
Assim podemos tomar $z^{(s)}(t) = \rho^{(s)} e^{i\omega_s t}$. A solução geral para o sistema linear é obtida pelas combinações lineares (complexas)

$$z(t) = \sum_{s=1}^{n} a_s \, \rho^{(s)} e^{i\omega_s t} \quad , \text{onde } a_s = C_s e^{i\phi_s} \text{ é um nº complexo.}$$

tomando a pte real: $\boxed{\eta(t) = \sum_{s=1}^{n} C_s \, \rho^{(s)} \cos(\omega_s t + \phi_s)}$

Cada solução é chamada de um modo normal de vibração. Em cada MNV, As coordenadas de cada partícula vibram com a mesma frequência (amplitudes distintas) exemplo: dois pêndulos acoplados por 1 mola, em posição ligeiramente deslocada do repouso

assumindo: pêndulos ideais idênticos; mola no comprimento natural do c/ pêndulos na pos. vertical



Pos de equilíbrio: $\theta_1 = \theta_2 = 0$

Coordenadas: desloc. horizontais $\eta_{1,2} = l_{1,2}\,\mathrm{sen}\,\theta_{1,2} \approx l_{1,2}\,\theta_{1,2}$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot\eta_1^2 + \dot\eta_2^2\right) \quad ; \quad V = \frac{k}{2}\left[\eta_2 - \eta_1\right]^2 + mgl\left[(1-\cos\theta_1) + (1-\cos\theta_2)\right]$$

usando $\cos\theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2} = 1 - \frac{\eta_1^2}{2l^2}$: $\boxed{V = \frac{1}{2}\left[k(\eta_1 - \eta_2)^2 + \frac{mg}{l}\left(\eta_1^2 + \eta_2^2\right)\right]}$

Ou seja: $\hat{T} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$ $\quad \hat{V} = \begin{bmatrix} k + \frac{mg}{l} & -k \\ -k & k + \frac{mg}{l} \end{bmatrix}$ → atenção! o coef. de $\eta_1\eta_2$ que aparece em $2V$ é igual a $V_{12} + V_{21} = 2V_{12}$

∴ as frequências dos modos normais são as soluções de

$$0 = \begin{vmatrix} k + \frac{mg}{l} - m\omega^2 & -k \\ -k & k + \frac{mg}{l} - m\omega^2 \end{vmatrix} = \left(k + \frac{mg}{l} - m\omega^2\right)^2 - k^2$$

$$\therefore m\omega^2 = k + \frac{mg}{l} \pm k = \frac{mg}{l} \text{ ou } 2k + \frac{mg}{l} \rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \; ; \; \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$$

vetores característicos: $\begin{pmatrix} K & -K \\ -K & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \rho^{(1)} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

normalização: $\rho^{(1)T} \cdot T \rho^{(1)} = 2m\alpha^2 \rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2m}}$

$\begin{pmatrix} -K & -K \\ -K & -K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^{(2)} \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow \rho^{(2)} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\beta = \frac{1}{\sqrt{2m}}$ tb.

Note que $\rho^{(1)T} \cdot T \cdot \rho^{(2)} = 0$ automaticamente. $A = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

interpretação: modo 1 = oscil do CM  (mola nem tensionada)

modo 2: "respiro" 

Sol. geral: $\zeta(t) = \begin{pmatrix} c^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ c^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{pmatrix} \longrightarrow \eta(t) = A\,\zeta(t)$

$$\eta_1(t) = \sum_s c^{(s)} \rho_1^{(s)} \cos(\omega_s t + \phi_s) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left[c^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + c^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \right]$$

$$\eta_2(t) = \sum_s c^{(s)} \rho_2^{(s)} \cos(\omega_s t + \phi_s) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left[c^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) - c^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \right]$$

ex: se $\eta_1(0) = \dot{\eta}_1(0) = \dot{\eta}_2(0) = 0$, $\eta_2(0) = a$ $\quad \therefore \begin{cases} \zeta(0) = A^T T \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} \rightarrow \\ \dot{\zeta}(0) = A^T T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

$\Longrightarrow c^{(1)} = \frac{m}{2} = -c^{(2)}$; $\phi_1 = \phi_2 = 0 \Longrightarrow \boxed{\eta(t) = \frac{1}{2} a \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t \\ \cos \omega_2 t + \cos \omega_2 t \end{pmatrix}}$